# ESTIMASI PARAMETER BAYESIAN PADA ANALISIS DATA KETAHANAN HIDUP BERDISTRIBUSI EKSPONENSIAL MELALUI PENDEKATAN SELF. STUDI KASUS : ANALISIS KETAHANAN HIDUP FLOUROPHORES.

**Kiki Reskianti, Nurtiti Sunusi dan Nasrah Sirajang**

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Hasanuddin (UNHAS)
Jl. Perintis Kemerdekaan KM.10 Makassar 90245, Indonesia
kikireskianti@ymail.com

Abstrak

*Dalam skripsi ini dikaji tentang estimasi Bayesian dengan pendekatan Squared Error Loss Function (SELF) dengan studi kasus analisis Ketahanan Hidup Flourophores. Untuk menganalisa data ketahanan hidup, dibutuhkan informasi sebaran prior dan informasi sampel, yang selanjutnya akan dibentuk menjadi distribusi posterior. Dengan ditemukannya distribusi posterior, maka etimator $\theta$ dari distribusi eksponesial dapat ditentukan dengan ekspektasi minimum dari loss function dengan pendekatan SELF maupun GELF.*

*Informasi prior dan informasi sampel merupakan fungsi yang diketahui, dimana informasi prior dalam kasus ini yaitu distribusi gamma, mean dari distribusi $Gamma(\alpha, \beta)$ sekaligus digunakan sebagai informasi prior. Estimasi bayesian pada $\hat{\theta}_G$ dengan pendekatan GELF dapat dinyatakan menjadi SELF dengan mensubtitusi $\alpha_1 = -1$. Namun tidak berlaku untuk $\alpha_1$ yang lainnya, sehingga dapat peneliti simpulkan pendekatan SELF lebih baik dari pada pendekatan GELF untuk distribusi eksponensial.*

**Kata Kunci** : *Estimasi, Estimasi Bayesian, SELF, GELF, loss function, Analisis Ketahanan Hidup, Distribusi Eksponensial*

## PENDAHULUAN

Analisis ketahanan hidup (*lifetime*) telah dikembangkan menjadi topik yang penting di berbagai bidang, terutama di bidang teknik mesin (*engineering*), sains dan biomedis. Menurut Hidayah (1994), distribusi waktu ketahanan hidup biasanya digambarkan dengan tiga fungsi yaitu fungsi ketahanan hidup (*survival function*), fungsi kepadatan peluang (*probabily density function*) dan fungsi kegagalan (*hazard function*). Data ketahanan hidup dari beberapa individu dalam suatu pengamatan dapat dikembangkan dengan analisis regresi linier untuk memeriksa hubungan antara variabel terikat (*dependent*) sebagai fungsi distribusi kumulatif dan variabel bebas (*independent*) sebagai waktu kegagalan.

Estimasi parameter diperlukan untuk membentuk suatu model peramalan terbaik. Saat ini dikenal dua pendekatan utama untuk mengestimasi parameter yaitu pendekatan klasik (*classical approach*) dan pendekatan Bayesian (*Bayesian approach*). Salah satu metode estimasi parameter dengan pendekatan klasik adalah *Maximum Likelihood Estimates* (MLE). Metode Maksimum Likelihood merupakan suatu metode yang mendasarkan inferensinya pada sampel, sedangkan Bayes memperkenalkan suatu metode di mana seseorang perlu mengetahui bentuk distribusi awal (*prior*). Sebelum menarik sampel dari suatu populasi terkadang diperoleh informasi mengenai parameter yang akan diestimasi. Informasi ini kemudian digabungkan dengan informasi dari sampel yang merupakan fungsi Likelihood untuk digunakan dalam mengestimasi parameter populasi (Walpole dan Myers, 1995). Terdapat beberapa metode estimasi Bayes yang digunakan untuk mengestimasi parameter distribusi yaitu *General Entropy Loss Function* (GELF), *Squared Error Loss Function* (SELF) dan lain-lain.

Menurut Shah dan Patel (2009), pendekatan dengan estimasi Bayesian melalui metode *GELF* lebih baik dari pada pendekatan *SELF* untuk data yang berdistribusi Geometrik. Namun dalam tulisannya tidak dibahas apakah pernyataan tersebut berlaku untuk semua bentuk distribusi data. Oleh karena itu, tujuan dari penelitian ini yaitu menganalisa data ketahanan hidup berdistribusi ekpnonensial menggunakan pendekatan Bayesian dengan pendekatan SELF.

## MASALAH DAN PEMBAHASAN

### 1. Distribusi Prior

Dalam analisis Bayesian, ketika suatu populasi mengikuti distribusi tertentu dengan suatu parameter di dalamnya (misal dalam hal ini $\theta$), maka dimungkinkan bahwa parameter $\theta$ mengikuti suatu distribusi peluang tertentu yang dikenal sebagai distribusi prior.

Dalam menentukan distribusi prior dapat dilihat berdasarkan ruang parameternya. Dalam kasus ini, distribusi Gamma ditetapkan sebagai distribusi prior sekawan untuk distribusi eksponensial dengan parameter $\theta$ dimana $0 < \theta < \infty$. Distribusi eksponensial adalah salah satu kasus khusus dari distribusi gamma. Fungsi gamma didefinisikan oleh:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty \theta^{\alpha-1} e^{-\theta} d\theta,$$

untuk $\alpha > 0$. Terlihat fungsi gamma dengan parameter $\theta$ dimana $0 < \theta < \infty$. Dimana $\theta$ merupakan peluang sukses dalam distribusi eksponensial.

Permasalahan selanjutnya yang muncul adalah penentuan parameter $\alpha$ dan $\beta$ untuk distribusi $Gamma(\alpha, \beta)$ yang digunakan sebagai distribusi prior. Penentuan parameter $\alpha$ dan $\beta$ untuk distribusi $Gamma(\alpha, \beta)$ ini dapat diselesaikan dengan mencocokkan antara mean dan variansi distribusi gamma dengan mean dan variansi distribusi eksponensial.

Mean dan variansi distribusi eksponensial masing-masing diberikan oleh:

$$E(X) = \frac{1}{\theta} \text{ dan } Var(X) = \frac{1}{\theta^2}$$

Mean dan variansi distribusi gamma masing-masing diberikan oleh:

$$E(X) = \alpha\beta \text{ dan } Var(X) = \alpha\beta^2$$

Jika diketahui nilai $\bar{x}$ maka dengan metode dengan mencocokkan antara mean dan variansi distribusi gamma dengan mean dan variansi distribusi eksponensial diperoleh nilai $\alpha = 1$ dan $\beta = \frac{1}{\bar{x}}$.

### 2. Distribusi Posterior

Dalam estimasi Bayes, setelah informasi sampel diambil dan prior telah ditentukan maka distribusi posteriornya dicari dengan mengalikan priornya dengan informasi sampel yang diperoleh dari likelihoodnya, di mana prior ini independen terhadap likelihoodnya (Bolstad, 2007 dalam Ade Candra 2011). Distribusi posterior tersebut diberikan oleh:

$$f(\theta; x_i) = \frac{f(\theta)\, f(x_i;\theta)}{\int_0^\infty f(\theta)\, f(x_i;\theta)\ d\theta}$$

fungsi kepadatan $f(\theta; x_i)$ menunjukkan distribusi posterior, $f(\theta)$ menunjukkan distribusi prior dan fungsi $f(x_i;\theta)$ menunjukkan fungsi likelihood.

$$f(\theta; x_i) = \frac{f(\theta) f(\theta; x_i)}{\int_0^\infty f(\theta) f(\theta; x_i)\, d\theta}$$

$$= \frac{\theta^{n+\alpha-1} e^{-\theta\left(\sum_{i=1}^n x_i + \frac{1}{\beta}\right)}}{\Gamma(n+\alpha)\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i + \frac{1}{\beta}}\right)^{n+\alpha}}$$

atau bisa ditulis $Gamma\left(n+\alpha, \frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i + \frac{1}{\beta}}\right)$.

### 3. Estimasi Bayesian Distribusi Eksponensial melalui Pendekatan *SELF*

Estimasi parameter yang digunakan dalam kasus ini menggunakan *symmetric loss function* yang dikenal sebagai SELF atau *Squared Error Loss Function*, dimana *loss function* untuk SELF diberikan sebagai berikut:

$$L(\theta,\delta)=(\delta-\theta)^2$$

untuk $0<\theta<\infty$. Dimana $\delta$ merupakan estimator bayesian untuk $\theta$ dengan pendekatan *SELF*.

Estimator Bayesian dari $\theta$ pada distribusi eksponensial dengan menggunakan pendekatan *Squared Error Loss Function* diperoleh dengan meminimumkan ekspektasi *loss function* yang diperoleh sebagai berikut:

$$\frac{d}{dy}(E[L(\theta,\delta)])=0$$

sehingga estimator bayesian untuk $\theta$ dengan pendekatan *SELF* adalah

$$\hat{\theta}_s=E[\theta]$$

sehingga estimasi Bayesian untuk $\theta$ dengan pendekatan SELF adalah:

$$\hat{\theta}_s=E[\theta]$$

$$=\int_0^{\infty}\theta\frac{\theta^{n+\alpha-1}e^{-\theta\left(\sum_{i=1}^n x_i+\frac{1}{\beta}\right)}}{\Gamma(n+\alpha)\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i+\frac{1}{\beta}}\right)^{n+\alpha}}d\theta$$

$$\hat{\theta}_s=\frac{n+\alpha}{\sum_{i=1}^n x_i+\frac{1}{\beta}}$$

### 4. Estimasi Bayesian Distribusi Eksponensial melalui Pendekatan *GELF*

*General Entropy Loss Function* (*GELF*) menyangkut pada fungsi kerugian *asymmetric* yang diberikan oleh Shah dan Patel (2009) yaitu:

$$L(\theta,y)=\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha_1}-\alpha_1\ ln\left(\frac{y}{\theta}\right)-1;$$

$$y=z(\theta_1,\theta_2,p)$$

untuk $\alpha_1\neq0,\ 0<\theta<\infty$. Parameter $\alpha_1$ menunjukkan penyimpangan asimetri dan $y$ merupakan estimator bayesian untuk $\theta$ dengan pendekatan *GELF*.

Estimator Bayesian dari $\theta$ pada distribusi eksponensial dengan menggunakan pendekatan *General Entropy Loss Function* diperoleh dengan meminimumkan ekspektasi *loss function* yang diperoleh sebagai berikut:

$$\frac{d}{dy}(E[L(\theta,y)])=0$$

sehingga estimator Bayesian untuk $\theta$ dengan pendekatan *GELF* adalah:

$$\hat{\theta}_G=E[\theta^{-\alpha_1}]^{-\frac{1}{\alpha_1}}$$

karena

$$E[\theta^{-\alpha_1}]=\int_0^{\infty}\theta^{-\alpha_1}\frac{\theta^{n+\alpha-1}e^{-\theta\left(\sum_{i=1}^n x_i+\frac{1}{\beta}\right)}}{\Gamma(n+\alpha)\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i+\frac{1}{\beta}}\right)^{n+\alpha}}d\theta$$

$$=\frac{\Gamma(n+\alpha-\alpha_1)}{\Gamma(n+\alpha)}\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i+\frac{1}{\beta}}\right)^{-\alpha_1}$$

maka

$$\hat{\theta}_G=E[\theta^{-\alpha_1}]^{-\frac{1}{\alpha_1}}$$

$$\hat{\theta}_G=\left(\frac{\Gamma(n+\alpha-\alpha_1)}{\Gamma(n+\alpha)}\right)^{-\frac{1}{\alpha_1}}\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i+\frac{1}{\beta}}\right)$$

## 5. Studi Kasus

Estimasi Bayesian untuk $\theta$ dengan pendekatan *SELF* adalah:

$$\hat{\theta}_s = \frac{n+\alpha}{\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{\beta}}$$

diketahui bahwa nilai $\alpha = 1$, $\beta = \frac{1}{\bar{x}}$ maka persamaan diatas dapat ditulis menjadi:

$$\hat{\theta}_s = \frac{n+1}{\sum_{i=1}^{n} x_i + \bar{x}}$$

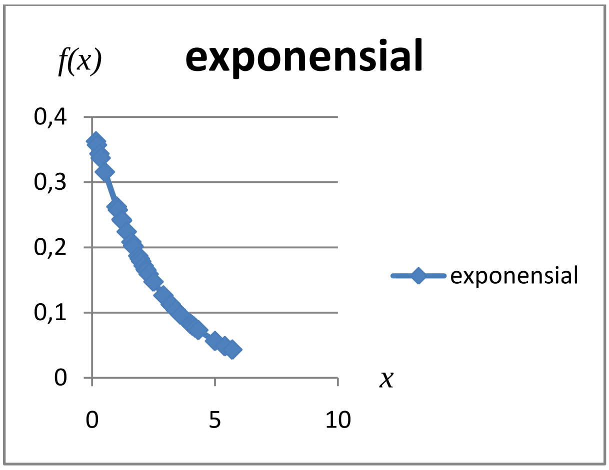
dengan $n = 44$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 116{,}28$ dan $\bar{x} = 2{,}64$ maka estimasi Bayesian dengan pendekatan *SELF* dapat dituliskan sebagai:

$$\hat{\theta}_s = \frac{44+1}{116{,}28 + 2{,}64}$$

maka hasil estimasi data ketahanan hidup *plourophores* adalah:

$$\hat{\theta}_s = 0{,}38$$

Grafik 1. Estimasi parameter dengan $\hat{\theta}_s = 0{,}38$ pada distribusi eksponensial




Sumber: olahdata excel

Estimasi Bayesian untuk $\theta$ dengan pendekatan *GELF* adalah:

$$\hat{\theta}_G = \left(\frac{\Gamma(n+\alpha-\alpha_1)}{\Gamma(n+\alpha)}\right)^{-\frac{1}{\alpha_1}} \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{\beta}}\right)$$

diketahui bahwa nilai $\alpha = 1$, $\beta = \frac{1}{\bar{x}}$ , $\sum_{i=1}^{n} x_i = 116{,}28$, $\bar{x} = 2{,}64$ dan $n = 44$. Dalam penelitiannya Syah dan Patel (2009) menuliskan estimasi bayesian pada $\hat{\theta}_G$ dengan pendekatan *GELF* dapat dinyatakan menjadi *SELF* dengan mensubtitusi $\alpha_1 = -1$, sedangkan dengan mensubtitusi $\alpha_1 = 1$ diperoleh nilai yang ekuivalen dengan hasil estimasi *SELF*.

Jika $\alpha_1 = 1$ maka

$$\hat{\theta}_G = \left(\frac{\Gamma(44+1-1)}{\Gamma(44+1)}\right)^{-1} \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i + \bar{x}}\right)$$

$$= \left(\frac{\Gamma(44)}{\Gamma(45)}\right)^{-1} \left(\frac{1}{116{,}28 + 2{,}64}\right) = 0{,}37$$

dan jika $\alpha_1 = -1$ maka

$$\hat{\theta}_G = \left(\frac{\Gamma(44+1+1)}{\Gamma(44+1)}\right) \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i + \bar{x}}\right)$$

$$= \left(\frac{\Gamma(46)}{\Gamma(45)}\right) \left(\frac{1}{116{,}28 + 2{,}64}\right) = 0{,}38$$

Namun tidak berlaku untuk $\alpha_1$ yang lainnya, jika $\alpha_1 = 2$ maka

$$\hat{\theta}_G = \left(\frac{\Gamma(44+1-2)}{\Gamma(44+1)}\right)^{-2} \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i + \bar{x}}\right)$$

$$= \left(\frac{\Gamma(43)}{\Gamma(45)}\right)^{-2} \left(\frac{1}{116{,}28 + 2{,}64}\right) = 30685{,}01$$

jika $\alpha_1 = -2$ maka

$$\hat{\theta}_G = \left(\frac{\Gamma(44+1+2)}{\Gamma(44+1)}\right)^{2} \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i + \bar{x}}\right)$$

$$= \left(\frac{\Gamma(47)}{\Gamma(45)}\right)^{2} \left(\frac{1}{116{,}28 + 2{,}64}\right) = 36730{,}32$$

## KESIMPULAN

Berdasarkan uraian dari bab-bab sebelumnya, maka dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut:

1. Untuk menganalisa data ketahanan hidup dibutuhkan informasi sebaran prior dan informasi sampel, yang selanjutnya akan dibentuk menjadi distribusi posterior. Dengan ditemukannya distribusi posterior maka etimator $\theta$ dari distribusi eksponesial dapat ditentukan dengan ekspektasi minimum dari *loss function* dengan pendekatan *SELF* maupun *GELF*.
2. Untuk studi kasus menggunakan data ketahanan hidup *flourophores*:

   Mean dari distribusi $Gamma(\alpha, \beta)$ sekaligus menjadi informasi prior. Mean distribusi gamma diberikan oleh:

   $$Mean(x) = E(x) = \alpha\beta = 1 \cdot \frac{1}{2{,}64} = 0{,}38$$

   hasil estimasi data ketahanan hidup *plourophores* dengan pendekatan *SELF* adalah:

   $$\hat{\theta}_s = 0{,}38$$

   Sedangkan untuk pendekatan *GELF* diperoleh,

   Jika $\alpha_1 = 1$ maka

   $$\hat{\theta}_G = \left(\frac{\Gamma(44+1-1)}{\Gamma(44+1)}\right)^{-1}\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i + \bar{x}}\right)$$

   $$= \left(\frac{\Gamma(44)}{\Gamma(45)}\right)^{-1}\left(\frac{1}{116{,}28 + 2{,}64}\right) = 0{,}37$$

   Jika $\alpha_1 = -1$ maka

   $$\hat{\theta}_G = \left(\frac{\Gamma(44+1+1)}{\Gamma(44+1)}\right)\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i + \bar{x}}\right)$$

   $$= \left(\frac{\Gamma(46)}{\Gamma(45)}\right)\left(\frac{1}{116{,}28 + 2{,}64}\right) = 0{,}38$$

   estimasi bayesian pada $\hat{\theta}_G$ dengan pendekatan *GELF* dapat dinyatakan menjadi *SELF* dengan mensubtitusi $\alpha_1 = -1$, sedangkan dengan mensubtitusi $\alpha_1 = 1$ diperoleh nilai yang ekuivalen dengan hasil estimasi *SELF*.

Namun tidak berlaku untuk $\alpha_1$ yang lainnya. Sehingga dapat peneliti simpulkan pendekatan *SELF* lebih baik dari pada pendekatan *GELF* untuk distribusi eksponensial.

## REFERENSI


Candra Siska, Ade. 2011. *Inferensi Statistik Distribusi Binomial Dengan Metode Bayes Menggunakan Prior Konjugat*. Universitas Diponegoro: Semarang. http://eprints.undip.ac.id/29153/1/ade_candra.pdf

Flourescence and Biomedical Intrumentation. *Lifetime Data of Selected Fluorophores.* http://www.iss.com/resources/pdf/datatables/LifetimeDataFluorophores.pdf

Gupta, R.D. and Kundu, D. 2001. *Generalized Exponential Distribution: Different Method of Estimations.* Journal of Statistical Computation and Simulations, 69: 315- 337.

Hidayah, Eny. 1994. *Analisis Ketahanan Hidup dengan Metode Gehan Mantel-Haenszel dan Tarone-Ware untuk 2 Sampel Sampai K Sampel.* Universitas Diponegoro : Semarang.

Hidayah, Entin. 2010. *Model Disagregasi Data Hujan Temporal Dengan Pendekatan Bayesian Sebagai Input Pemodelan Banjir.* Institut Teknologi Sepuluh Nopember: Surabaya

J. B. Shah and M. N. Patel. 2011. *Bayes Estimation of a Two-Parameter Geometric Distribution underMultiply Type II Censoring.* International Journal of Quality, Statistics, and Reliability Volume 2011, Article ID 618347

Kismiantini and Himmawati. 2003. *Hubungan antara Estimator Bayes dengan Estimator Klasik pada Distribusi Peluang Diskrit yang Khusus*. Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam UNNES: Semarang.

Lin, T.I. and Lee, J.C. 2003. *Bayesian analysis of Mixtures Modelling Using the Multivariate t-Distribution.* Statistics and Computing 14: 119- 130.

Lee, E.T. 2003. *Statistical Methods for Survival Data Analysis 3rd Edition.* John Wiley & Sons Inc: Canada.

Montgomery, D.C and Runger, G.C. 2011. *Applied Statistics and Probability for Engineers 5rd Edition*. John Wiley & Sons, Inc: Canada

Rahmawati, Diana. 2011. *Estimasi Model Regresi Linier Dengan Pendekatan Bayes.* Malang. Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.

Rahmiyanti, I. 2013. *Metode General Entropy Loss Function (Gelf) Dalam Estimasi Parameter Distribusi Campuran Geometrik.* Universitas Hasanuddin : Makassar

Sugito dan Mukid, Moch Abdul. 2011. *Distribusi Poisson Dan Distribusi Eksponensial Dalam Proses Stokastik.* Undip

Sugito dan Dwi Ispriyanti. 2010. *Distribusi Invers Gamma Pada Inferensi Bayesian.* FMIPA UNDIP.

Walpole, Ronald E dan Myers, Raymond H. 1995. *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuwan Edisi ke-4*. ITB : Bandung.

*Lampiran 1*

Data Ketahanan Hidup Flourophores yang diperoleh dari *Flourescence and Biomedical Intrumentation.*

| No. | Fluorophore | Lifetime [ns] |
|---|---|---|
| 1 | DAPI | 0.16 |
| 2 | Hoechst 33258-no DNA | 0.2 |
| 3 | CY3 | 0.3 |
| 4 | Hoechst 33342-noDNA | 0.35 |
| 5 | Indocyanine Green | 0.52 |
| 6 | Alexa Flour 647 | 1 |
| 7 | CY5 | 1 |
| 8 | CY5.5 | 1 |
| 9 | Hoechst 33342+ssDNA | 1.05 |
| 10 | Alexa Flour 680 | 1.2 |
| 11 | Hoechst 33258+dsDNA | 1.22 |
| 12 | Prodan | 1.41 |
| 13 | Ethidium Bromide-noDNA | 1.6 |
| 14 | YOTO+ ss DNA | 1.67 |
| 15 | Rhodamine B | 1.69 |
| 16 | DAPI+ssDNA | 1.88 |
| 17 | Hoechst 33258+ddDNA | 1.94 |
| 18 | Acridine Orange | 2 |
| 19 | YOTO-1 no DNA | 2.1 |
| 20 | Oregon Green 500 | 2.18 |
| 21 | DAPI+dsDNA | 2.2 |
| 22 | TOTO-1 | 2.2 |
| 23 | Hoechst 33342-dsDNA | 2.21 |
| 24 | YOTO+ ds DNA | 2.3 |
| 25 | Coumarin 6 | 2.5 |
| 26 | CY3B | 2.9 |
| 27 | Alexa Flour 633 | 3.2 |
| 28 | GFP | 3.2 |
| 29 | ATTO 565 | 3.4 |
| 30 | ATTO 655 | 3.6 |
| 31 | Alexa Flour 546 | 4 |
| 32 | Flourescein | 4 |
| 33 | Rhodamine 110 | 4 |
| 34 | Rhodamine 6G | 4.08 |
| 35 | Alexa Flour 488 | 4.1 |
| 36 | FITC | 4.1 |
| 37 | Oregon Green 488 | 4.1 |
| 38 | Texas Red | 4.2 |

| | | |
|---|---|---|
| 39 | Rhodamine 101 | 4.32 |
| 40 | CY3.5 | 5 |
| 41 | BODIPY TR-X | 5.4 |
| 42 | HPTS | 5.4 |
| 43 | BODIPY FL | 5.7 |
| 44 | Lucifer Yellow | 5.7 |

Sumber : http://www.iss.com/resources/pdf/datatables/LifetimeDataFluorophores.pdf